ARITHMETISCHE THEOREME.

VON

LEOPOLD GEGENBAUER.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 24. APRIL 1884.

In den folgenden Zeilen werde ich eine Reihe von neuen arithmetischen Sätzen mittheilen. Ich betrachte zunächst die Summe:

$$S_{n,\alpha} = \sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right] f(x) = \sum_{x=1}^{x=p} \left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right] f(x) + \sum_{x=p+1}^{x=n} \left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right] f(x) \qquad (\beta>\gamma\geqq 0).$$

Es sei:

1) $$\left[\frac{\alpha}{\beta p+\beta-\gamma}\right] = A$$

2) $$\left[\frac{\alpha}{\beta n-\gamma}\right] = B$$

3) $$F(r) = \sum_{x=1}^{x=r} f(x)$$

alsdann ist:

$$\sum_{x=p+1}^{x=n} \left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right] f(x) = \sum_{x=p+1,\ y=1}^{x=n,\ y=A} \varepsilon\left(\frac{\alpha}{y(\beta x-\gamma)}\right) f(x).$$

Nun ist aber, wenn:

$$\frac{\alpha}{y(\beta x-\gamma)} \lesseqgtr 1$$

ist, auch:

$$\frac{\alpha+\gamma y}{\beta x y} \lesseqgtr 1$$

und daher hat man:

$$\sum_{x=p+1,\ y=1}^{x=n,\ y=A} \varepsilon\left(\frac{\alpha}{y(\beta x-\gamma)}\right) f(x) = \sum_{x=p+1,\ y=1}^{x=n,\ y=A} \varepsilon\left(\frac{\alpha+\gamma y}{\beta x y}\right) f(x)$$

$$= \sum_{y=B+1,\ x=1}^{y=A,\ x=n} \varepsilon\left(\frac{\alpha+\gamma y}{\beta x y}\right) f(x) - AF(p) + BF(n).$$

Bei gegebenem y erhält die zahlentheoretische Function $\varepsilon\left(\frac{\alpha+\gamma y}{\beta x y}\right)$ für alle x, welche grösser als $\left[\frac{\alpha+\gamma y}{\beta y}\right]$ sind, den Werth 0, und daher ist:

$$\sum_{y=B+1,\, x=1}^{y=A,\, x=n} \varepsilon\left(\frac{\alpha+\gamma y}{\beta x y}\right) f(x) = \sum_{y=B+1}^{y=A} F\left(\left[\frac{\alpha+\gamma y}{\beta y}\right]\right).$$

Es ist also:

4) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right] f(x) = \sum_{x=1}^{x=p}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right] f(x) + \sum_{x=B+1}^{x=A} F\left(\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right) - AF(p) + BF(n).$$

Ist:

5) $$\alpha < \beta n - \gamma,$$

so wird $B = 0$, ist aber:

6) $$\beta n - \gamma \leqq \alpha < \beta(n+1) - \gamma,$$

so wird $B = 1$ und $\left[\frac{\alpha+\gamma}{\beta}\right] = n$.

Man hat daher in diesem Falle die specielle Relation:

7) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right] f(x) = \sum_{x=1}^{x=p}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right] f(x) + \sum_{x=1}^{x=A} F\left(\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right) - AF(p).$$

Für $p = 0$ verwandeln sich die Gleichungen 4) und 7) in die folgenden:

8) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right] f(x) = \sum_{x=B+1}^{x=A} F\left(\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right) + BF(n).$$

9) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right] f(x) = \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]} F\left(\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right).$$

Setzt man:

$$r_x = \frac{\alpha}{\beta x-\gamma} - \left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]$$

so ist:

10) $$\sum_{x=1}^{x=n}[k r_x] f(x) = \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{k\alpha}{\beta x-\gamma}\right] f(x) - k\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right] f(x)$$

$$= S_{kn,\, k\alpha} - kS_{n,\, \alpha} - \sum_{x=n+1}^{x=kn}\left[\frac{k\alpha}{\beta x-\gamma}\right] f(x)$$

wo k eine positive ganze Zahl sein soll.

Aus den Relationen:

$$\frac{pr}{s} = \left[\frac{pr}{s}\right] + \varepsilon \qquad (0 \leqq \varepsilon < 1)$$

$$\frac{r}{s} = \left[\frac{r}{s}\right] + \varepsilon_1 \qquad (0 \leqq \varepsilon_1 < 1)$$

folgt:

11) $$\left[\frac{pr}{s}\right] = p\left[\frac{r}{s}\right] + \eta_{p,r,s} \qquad (0 \leqq \eta_{p,r,s} < p),$$

also:

$$\left[\frac{pr}{s}\right] \equiv \eta_{p,r,s} \text{ (mod. } p)$$

so dass $\eta_{p,r,s}$ der Rest ist, welcher bei der Division von $\left[\frac{pr}{s}\right]$ durch p bleibt.

Ist speciell $p = 2$, so verwandelt sich die Formel 11) in die schon von Gauss mitgetheilte Relation:

12) $$\left[\frac{2r}{s}\right] = 2\left[\frac{r}{s}\right] + \eta_{2,r,s},$$

wo $\eta_{2,r,s}$ die Werthe 0 oder 1 hat, je nachdem $\left[\frac{2r}{s}\right]$ gerade oder ungerade ist.

Man hat daher auch die Gleichungen:

13) $$\sum_{x=1}^{x=n} \eta_{k,\alpha\,\beta x-\gamma}\, f(x) = \sum_{x=1}^{x=n} [kr_x] f(x)$$

14) $$\sum_{x=1}^{x=n}{}' f(x) = \sum_{x=1}^{x=n} [2r_x] f(x)$$

wo die Marke am Summenzeichen anzeigt, dass nur jene Werthe von x zu nehmen sind, für welche $\left[\frac{2\alpha}{\beta x-\gamma}\right]$ ungerade ist.

Nach den früheren Entwicklungen ist nun:

$$\sum_{x=n+1}^{x=kn} \left[\frac{k\alpha}{\beta x-\gamma}\right] f(x) = \sum_{x=B+1}^{x=A} F\left(\left[\frac{k\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right) - AF(n) + BF(kn),$$

wo:

$$A = \left[\frac{k\alpha}{\beta n+\beta-\gamma}\right]$$

$$B = \left[\frac{k\alpha}{\beta kn-\gamma}\right]$$

ist. Genügt nun α der Bedingung 6), so hat man:

$$\frac{k\alpha}{\beta kn-\gamma} < 1 + \frac{\beta k-(k-1)\gamma}{\beta kn-\gamma}$$

und daher ist:

$$B = 0, 1.$$

Ist $B = 1$, so ist auch:

$$kn \leqq \frac{k\alpha+\gamma}{\beta} < k(n+1)$$

und daher:

$$\left[\frac{k\alpha+\gamma}{\beta}\right] = kn+\rho,$$

wo ρ eine nicht negative ganze Zahl ist, welche nicht grösser als $k-1$ sein kann.

Aus der Relation 6) folgt ferner:

$$A = k-\sigma\ (\sigma > 0).$$

Nun ergibt sich aus der Relation:

$$k-\sigma \leqq \frac{k\alpha}{\beta n+\beta-\gamma} < k-\sigma+1$$

sofort die Beziehung:

$$\frac{k\alpha+\gamma(k-\sigma+\tau)}{\beta(k-\sigma+\tau)} < n+1,\ (\tau = 1, 2, \ldots, \sigma-1).$$

Es ist aber auch:

$$n \leqq \frac{k\alpha+\gamma(k-\sigma+\tau)}{\beta(k-\sigma+\tau)}$$

denn wäre:

$$\frac{k\alpha+\gamma(k-\sigma+\tau)}{\beta(k-\sigma+\tau)} < n$$

so hätte man:

$$0 < (\beta n-\gamma-\alpha)k-(\sigma-\tau)(\beta n-\gamma),$$

was nach den gemachten Voraussetzungen unmöglich ist. Man hat daher die Gleichung:

$$\left[\frac{k\alpha+\gamma(k-\sigma+\tau)}{\beta(k-\sigma+\tau)}\right] = n \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, \sigma-1).$$

Es ist also schliesslich:

$$15) \qquad \sum_{x=1}^{x=n} [kr_x] f(x) = S_{kn,\,k\alpha} - kS_{n,\,\alpha} - \sum_{x=1}^{x=k-1} F\left(\left[\frac{k\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right) + (k-1)F(n) + F(kn+\rho_1) - F(kn),$$

wo $\rho_1 = 0$ ist, wenn:

$$k\alpha < \beta kn - \gamma$$

ist, sonst aber die kleinste Wurzel der Congruenz:

$$z \equiv \left[\frac{k\alpha+\gamma}{\beta}\right] \pmod{k}$$

vorstellt.

Nimmt man speciell:

$$f(x) = 1,\ \alpha = n,\ \gamma = 0,\ \beta = 1,$$

so erhält man die Formel:

$$16) \qquad \sum_{x=1}^{x=n} [kr_x] = \sum_{x=1}^{x=kn} \left[\frac{kn}{x}\right] - k\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right] + (k-1)n - \sum_{x=1}^{x=k-1}\left[\frac{kn}{x}\right]$$

welche Gleichung man unter Berücksichtigung der bekannten Relation:

$$17) \qquad \sum_{x=1}^{x=m}\left[\frac{m}{x}\right] = m \log m + (2C-1)m + \varepsilon' \sqrt{m}$$

wo C die Euler'sche Constante und ε' eine Grösse ist, welche bei wachsendem m endlich bleibt, auch in folgender Form schreiben kann:

$$18) \qquad \sum_{x=1}^{x=n} [kr_x] = n\{k\log k + k - 1\} - kn \sum_{x=1}^{x=k-1} \frac{1}{x} + \varepsilon'\sqrt{n} + \varepsilon''(k-1) \qquad (0 \leqq \varepsilon'' < 1).$$

Es ist also:

$$19) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=n} [kr_x]}{n} = k\log k + k - 1 - k\sum_{x=1}^{x=k-1}\frac{1}{x}$$

Man hat daher den Satz:

Das arithmetische Mittel der grössten ganzen Zahlen, welche in den k-fachen Verhältnissen der Reste zu den jeweiligen Divisoren enthalten sind, die bei der Division einer ganzen Zahl n durch alle nicht grösseren ganzen Zahlen auftreten, nähert sich mit wachsendem n dem Ausdrucke $k\log k + k - 1 - k\sum_{x=1}^{x=k-1}\frac{1}{x}$.

Den Fall $k=2$ der zuletzt abgeleiteten speciellen Formeln, aus welchem bekanntlich folgt, dass von den Verhältnissen der Reste zu den Divisoren, welche bei der Division hinlänglich grosser Zahlen n durch alle nicht grösseren ganzen Zahlen auftreten, eine grössere Anzahl in dem Intervalle $0\ldots\frac{1}{2}$, als in dem Intervalle $\frac{1}{2}\ldots 1$ liegt, hat schon Dirichlet mitgetheilt; für $k=3, 4, 6$ wurden die obigen Relationen von Herrn Berger abgeleitet.

Berücksichtigt man, dass jedesmal, wenn für einen bestimmten Werthe von $x=x_\nu$

20) $$\frac{\nu}{k} \leqq r_{x_\nu} < \frac{\nu+1}{k}$$

ist, die Gleichung:

$$[kr_{x_\nu}] = \nu$$

besteht, so kann man die Formel 15) auch in folgender Weise schreiben:

21) $$\sum_{\nu=1}^{\nu=k-1} \nu f_\nu = S_{kn,k\alpha} - kS_{n,\alpha} - \sum_{x=1}^{x=k-1} F\left(\left[\frac{k\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right) + (k-1)F(n) + F(kn+\rho_1) - F(kn),$$

wo:

$$f_\nu = \sum_{x_\nu} f(x_\nu)$$

ist, wenn die Summation bezüglich x_ν über alle jene Werthe von x erstreckt wird, für welche die Relation 20) besteht.

Erhält die Function $f(x)$ den speciellen Werth 1, so bezeichnet f_ν die Anzahl der Reste, welche in dem Intervalle $\frac{\nu}{k}\ \ldots\ \frac{\nu+1}{k}$ liegen.

Gibt man in der Gleichung 9) der Function $f(x)$ die speciellen Werthe:

22) $$f(x) = 1, x, x^3, x^m-(x-1)^m, \sin\frac{(2x-1)\pi}{4}\quad \cos\frac{(2x-1)\pi}{4},\quad \cos x\vartheta, \sin x\vartheta,$$

so erhält $F(r)$ der Reihe nach folgende Werthe:

23) $$F(r) = r,\ D(r),\ D^3(r),\ r^m,\ \sqrt{2}\ \sin^2\frac{r\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\ \sin\frac{r\pi}{2},$$
$$-\frac{1}{2} + \frac{\sin\frac{(2r+1)\vartheta}{2}}{2\sin\frac{\vartheta}{2}},\quad \frac{1}{2}\ \operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{\cos\frac{(2r+1)\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}$$

wo $D(r)$ die $r$te Trigonalzahl ist, und daher hat man die Formeln:

24) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right] = \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]}\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]$$

25) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right] x = \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]} D\left(\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right)$$

26) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right] x^3 = \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]} D^2\left(\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right)$$

27) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right] x^m - \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right](x-1)^m = \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]}\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]^m$$

28) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\sin\frac{(2x-1)\pi}{4}=\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right)$$

29) $$\sum_{x=1}^{x=r}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\cos\frac{(2x-1)\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]}\sin\left(\frac{\pi}{2}\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right)$$

30) $$2\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\cos x\vartheta=-\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]+\frac{1}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]}\sin\vartheta\left\{\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]+\frac{1}{2}\right\}$$

31) $$2\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\sin x\vartheta=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}-\frac{1}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]}\cos\vartheta\left\{\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]+\frac{1}{2}\right\}$$

Setzt man in der Gleichung 30) $\vartheta=\pi,\ \frac{\pi}{2}$ und in der Gleichung 31) $\vartheta=\frac{\pi}{2}$, so erhält man die speciellen Formeln:

32) $$2\sum_{x=1}^{x=n}(-1)^x\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]=-\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]+\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]}(-1)^{\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]}$$

33) $$2\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\cos\frac{x\pi}{2}=\sum_{x=1}^{x=n}\left\{(-1)^{\frac{x}{2}}+(-1)^{\frac{3x}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]=-\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]+\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]}\sin\left\{\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right\}$$

34) $$2\sum_{x=i}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\sin\frac{x\pi}{2}=\sum_{x=1}^{x=n}\left\{(-1)^{\frac{x-1}{2}}-(-1)^{\frac{3x-1}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]-\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]}\cos\left\{\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right\}.$$

Aus diesen Formeln kann man sofort eine Reihe von Sätzen über die Divisoren der ganzen Zahlen ableiten. Es ist nämlich:

$$\sum_{x=1}^{x=m}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]f_1(\beta x-\gamma)=\sum_{x=1,\,y=1}^{x=m,\,y=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]}\varepsilon\left(\frac{\alpha}{y(\beta x-\gamma)}\right)f_1(\beta x-\gamma).$$

$$=\sum_{r=1}^{r=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]}\varepsilon\left(\frac{\alpha}{r}\right)\sum_{d'_r}f(d'_r),$$

wo die Summation bezüglich d'_r über alle Divisoren von r zu erstrecken ist, welche von der Form $\beta x-\gamma$ und nicht grösser als $\beta m-\gamma$ sind.

Setzt man nun:

$$F_1(r)=\sum_{d'_r}f_1(d'_r),$$

so hat man:

35) $$\sum_{r=1}^{r=\left[\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right]}F_1(r)=\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]f_1(\beta x-\gamma).$$

Nimmt man speciell:

$$f_1(x)=x,\quad \alpha=n,\quad \beta=2,\quad \gamma=1,$$

so erhält man die Relation:

$$\sum_{x=1}^{x=n} k_1(x) = \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]} \left[\frac{n}{2x-1}\right](2x-1) \tag{36}$$

wo $k_m(x)$ die Summe der $m$ten Potenzen der ungeraden Divisoren von x bezeichnet.

Diese specielle Relation hat unlängst Herr Stieltjes in einer in den Schriften der Pariser Akademie enthaltenen Notiz mitgetheilt („Sur quelques théorèmes arithmétiques." Note de M. Stieltjes [Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite] C. R. Tome XCVII, Nr. 17, 22 octobre 1883).

Nach den eben gemachten Bemerkungen ergeben sich aus den obigen Formeln folgende arithmetische Sätze:

Die Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche von der Form $\beta x-\gamma$ sind, ist gleich der Summe der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{\beta n-(n-1)\gamma}{\beta}, \frac{\beta n-(n-2)\gamma}{2\beta}, \frac{\beta n-(n-3)\gamma}{3\beta}, \ldots, \frac{\beta n}{\beta n}$$

enthalten sind.

Die Anzahl der ungeraden Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n ist gleich der Summe der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{4}, \frac{n+3}{6}, \ldots, \frac{2n}{2n}$$

enthalten sind.

Die Summe der ungeraden Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n ist gleich der Summe der Quadrate der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{4}, \frac{n+3}{6}, \ldots, \frac{2n}{2n}$$

enthalten sind.

Die Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche von der Form $4r+1$ sind, übertrifft die Anzahl der übrigen ungeraden Divisoren um die Anzahl der ungeraden grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{4}, \frac{n+3}{6}, \ldots, \frac{2n}{2n}$$

enthalten sind.

Die Anzahl aller Darstellungen einer beliebigen positiven ungeraden Zahl n oder einer einfach geraden Zahl $2n$ durch die Form x^2+y^2 ist gleich dem vierfachen Überschusse der Anzahl der ungeraden grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{4}, \frac{n+3}{6}, \ldots, \frac{2n}{2n}$$

enthalten sind, über die Anzahl der ungeraden grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{2}, \frac{n+1}{4}, \frac{n+2}{6}, \ldots, \frac{2n-2}{2n-2}$$

enthalten sind.

Ist n eine Primzahl von der Form $4r+1$, so kommen unter den grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{4}, \frac{n+3}{6}, \ldots, \frac{2n}{2n}$$

enthalten sind, zwei ungerade Zahl mehr vor, als unter den grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{2}, \frac{n+1}{4}, \frac{n+2}{6}, \ldots, \frac{2n-2}{2n-2}$$

enthalten sind; ist aber n eine Primzahl von der Form $4r-1$, so ist die Anzahl der ungeraden grössten ganzen Zahlen in beiden Zahlenreihen gleich gross.

Die Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche von der Form $8r\pm1$ sind, übertrifft die Anzahl der übrigen ungeraden Divisoren um eben so viel, als die Anzahl derjenigen grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{4}, \frac{n+3}{6}, \ldots, \frac{2n}{2n}$$

enthalten sind und die Form $4r+1$ besitzen, grösser ist als die Anzahl der übrigen ungeraden grössten ganzen Zahlen.

Die Anzahl aller den Bedingungen $y \geqq 0$, $2x > 3y$ genügenden Darstellungen einer positiven ungeraden Zahl n durch die Form x^2-2y^2 ist gleich dem Überschusse der Differenz aus der Anzahl derjenigen ungeraden grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{4}, \frac{n+3}{6}, \ldots, \frac{2n}{2n}$$

enthalten sind und die Form $4r+1$ besitzen, und der Anzahl der übrigen ungeraden grössten ganzen Zahlen, über die Differenz aus der Anzahl derjenigen ungeraden grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{2}, \frac{n+1}{4}, \frac{n+2}{6}, \ldots, \frac{2n-2}{2n-2}$$

enthalten und von der Form $4r+1$ sind, und der Anzahl der übrigen ungeraden grössten ganzen Zahlen.

Die Summe der $m$ten Potenzen der Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n übertrifft die Summe der $m$ten Potenzen der um die Einheit verminderten Divisoren um die Summe der $m$ten Potenzen der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \ldots, \frac{n}{n}$$

enthalten sind.

Die doppelte Summe der Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n übertrifft ihre Anzahl um die Summe der Quadrate der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \ldots, \frac{n}{n}$$

enthalten sind.

Die Summe derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von $n+1$ bis $2n$, welche grösser als n sind, ist nach dem Modul 2 der Summe derjenigen ganzen Zahlen x congruent, für welche die in dem Bruche $\frac{2n}{x}$ enthaltene grösste ganze Zahl ungerade ist.

Berücksichtigt man, dass:

$$\left[\sqrt{m}\right] = \left[\sqrt{m-1}\right] + \tau$$

ist, wo τ gleich 1 oder 0 ist, je nachdem m ein Quadrat ist oder nicht, so sieht man, dass die Anzahl der Darstellungen einer positiven ungeraden oder einfachgeraden Zahl n als Summe zweier Quadrate durch folgende Differenz ausgedrückt wird:

$$\sum_{x=0}^{x=\left[\sqrt{n}\right]} \left[\sqrt{n-x^2}\right] - \sum_{x=0}^{x=\left[\sqrt{n-1}\right]} \left[\sqrt{n-1-x^2}\right]$$

Man hat daher auch die Relation:

$$\sum_{x=1}^{x=n}(-1)^{x-1}\left[\frac{n}{2x-1}\right]-\sum_{x=1}^{x=n-1}(-1)^{x-1}\left[\frac{n-1}{2x-1}\right]=\sum_{x=0}^{x=[\sqrt{n}]}\left[\sqrt{n-x^2}\right]-\sum_{x=0}^{x=[\sqrt{n-1}]}\left[\sqrt{n-1-x^2}\right]$$

Schreibt man in dieser Gleichung für n der Reihe nach:

$$n,\ n-1,\ n-2,\ldots,2$$

und addirt die so entstehenden Gleichungen, so erhält man die Formel:

37) $$\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]}(-1)^{x-1}\left[\frac{n}{2x-1}\right]=\sum_{x=0}^{x=[\sqrt{n}]}\left[\sqrt{n-x^2}\right]$$

welche schon Liouville ohne Beweis mitgetheilt hat.

Verbindet man diese Gleichung mit 32), so erhält man die Relation:

38) $$2\sum_{x=0}^{x=[\sqrt{n}]}\left[\sqrt{n-x^2}\right]=n-\sum_{x=1}^{x=}(-1)^{\left[\frac{n+x}{2x}\right]}$$

Die auf der linken Seite dieser Gleichung stehende Summe lässt sich noch auf eine andere Form bringen. Um zu derselben zu gelangen, betrachte ich die Summe:

39) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\beta+\sqrt{\alpha-\gamma x^\sigma}}{\delta}\right]f(x)=\sum_{x=1}^{x=p}\left[\frac{\beta+\sqrt{\alpha-\gamma x^\sigma}}{\delta}\right]f(x)+\sum_{x=p+1}^{x=n}\left[\frac{\beta+\sqrt{\alpha-\gamma x^\sigma}}{\delta}\right]f(x),$$

Da aus der Relation:

$$\frac{\beta+\sqrt{\alpha-\gamma x^\sigma}}{\delta y}\gtreqless 1$$

die Beziehung:

$$\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha-(\delta y-\beta)^2}{\gamma x^\sigma}}\gtreqless 1$$

folgt, so ist:

$$\sum_{x=p+1}^{x=n}\left[\frac{\beta+\sqrt{\alpha-\gamma x^\sigma}}{\delta}\right]f(x)=\sum_{x=p+1,\ y=1}^{x=n,\ y=A}\varepsilon\left(\frac{\beta+\sqrt{\alpha-\gamma x^\sigma}}{\delta y}\right)f(x)\qquad\left(A=\left[\frac{\beta+\sqrt{\alpha-\gamma(p+1)^\sigma}}{\delta}\right]\right)$$

$$=\sum_{x=p+1,\ y=1}^{x=n,\ y=A}\varepsilon\left(\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha-(\delta y-\beta)^2}{\gamma x^\sigma}}\right)f(x)$$

$$=\sum_{y=B+1,\ x=1}^{y=A,\ x=n}\varepsilon\left(\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha-(\delta y-\beta)^2}{\gamma x^\sigma}}\right)f(x)-AF(p)+BF(n)\qquad\left(B=\left[\frac{\beta+\sqrt{\alpha-\gamma n^\sigma}}{\delta}\right]\right)$$

$$=\sum_{y=B+1}^{y=A}F\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha-(\delta y-\beta)^2}{\gamma}}\right]\right)-AF(p)+BF(n)$$

und daher hat man die Gleichung:

40) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\beta+\sqrt{\alpha-\gamma x^\sigma}}{\delta}\right]f(x)=\sum_{x=1}^{x=p}\left[\frac{\beta+\sqrt{\alpha-\gamma x^\sigma}}{\delta}\right]f(x)+\sum_{x=B+1}^{x=A}F\left(\left[\sqrt[\sigma]{\frac{\alpha-(\delta x-\beta)^2}{\gamma}}\right]\right)-AF(p)+BF(n),$$

Setzt man in dieser Gleichung:

$$f(x)=1,\ \beta=1,\ \alpha=m,\ \gamma=1,\ \delta=2,\ \sigma=2,\ p=0,\ m\geqq n^2,$$

so erhält man die Relation:

41) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{1+\sqrt{m-x^2}}{2}\right]=\sum_{x=\left[\frac{3+\sqrt{m-n^2}}{2}\right]}^{x=\left[\frac{1+\sqrt{m-1}}{2}\right]}\left[\sqrt{m-(2x-1)^2}\right]+\left[\frac{1+\sqrt{m-n^2}}{2}\right]n,$$

in welcher Gleichung die von Herrn Cesaro mitgetheilte Formel:

42) $$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\left[\frac{1+\sqrt{n-x^2}}{2}\right]=\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sqrt{n}+1}{2}\right]}\left[\sqrt{n-(2x-1)^2}\right]$$

als specieller Fall enthalten ist.

Setzt man aber in der Gleichung 40):

$$f(x)=1,\ \beta=0,\ \delta=1,\ \gamma=4,\ \sigma=2,\ p=0,\ \alpha\geqq 4n^2$$

so ergibt sich die Formel:

43) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\sqrt{\alpha-4x^2}\right]=\sum_{x=\left[1+\sqrt{\alpha-4n^2}\right]}^{x=\left[\sqrt{\alpha-4}\right]}\left[\sqrt{\frac{\alpha-x^2}{4}}\right]+\left[\sqrt{\alpha-4n^2}\right]n$$

aus welcher wieder die specielle Relation:

44) $$\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sqrt{n}}{2}\right]}\left[\sqrt{n-4x^2}\right]=\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt{n-4}\right]}\left[\sqrt{\frac{n-x^2}{4}}\right]$$

sich ergibt.

Unter Benützung der eben abgeleiteten Formeln lässt sich die Gleichung 38) auch in folgender Gestalt schreiben:

45) $$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt{n-4}\right]}\left[\frac{1}{2}\sqrt{n-x^2}\right]+\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\left[\frac{1+\sqrt{n-x^2}}{2}\right]=n-\sum_{x=1}^{x=n}(-1)^{\left[\frac{n+x}{2x}\right]}$$

Setzt man in der Gleichung 7):

46) $$p=\lambda=\left[\frac{\sqrt{4\alpha\beta+\gamma^2}+\gamma}{2\beta}\right]$$

so hat man:

47) $$\lambda(\beta\lambda-\gamma)\leqq\alpha<(\lambda+1)(\beta\lambda+\beta-\gamma),$$

und daher:

$$A=\left[\frac{\alpha}{\beta\lambda+\beta-\gamma}\right]=\lambda-\xi,$$

wo ξ nur die Werthe 0, 1 haben kann.

Ist $A=\lambda-1$, so folgt aus der Relation:

$$\lambda-1\leqq\frac{\alpha}{\beta\lambda+\beta-\gamma}<\lambda$$

die Beziehung:

$$\lambda-1<\frac{\alpha+\gamma\lambda}{\beta\lambda}<\lambda+1.$$

Wäre nun:

$$\left[\frac{\alpha+\gamma\lambda}{\beta\lambda}\right]=\lambda-1:$$

so müsste:

$$\alpha<\lambda(\beta\lambda-\gamma)$$

sein, was nach 47) unmöglich ist, daher ist:

$$\left[\frac{\alpha+\gamma\lambda}{\beta\lambda}\right]=\lambda.$$

Man hat demnach die Gleichung:

$$48)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]f(x)=\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]f(x)+\sum_{x=1}^{x=\lambda}F\left(\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right)-\lambda F(\lambda).$$

Gibt man in dieser Gleichung der Function $f(x)$ der Reihe nach die speciellen Werthe 22), so erhält man die Formeln:

$$49)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]=\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]+\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]-\lambda^2$$

$$50)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]x=\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]x+\sum_{x=1}^{x=\lambda}D\left(\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right)-\frac{\lambda^2(\lambda+1)}{2}$$

$$51)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]x^3=\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]x^3+\sum_{x=1}^{x=\lambda}D^2\left(\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right)-\frac{\lambda^3(\lambda+1)^2}{4}$$

$$52)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]x^m-\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right](x-1)^m=\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]x^m-\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right](x-1)^m+\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]^m-\lambda^{m+1}$$

$$53)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\sin\frac{(2x-1)\pi}{4}=\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\sin\frac{(2x-1)\pi}{4}+\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=\lambda}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right)-\lambda\sqrt{2}\sin\frac{\lambda\pi}{4}$$

$$54)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\cos\frac{(2x-1)\pi}{4}=\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\cos\frac{(2x-1)\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{x=1}^{x=\lambda}\sin\left(\frac{\pi}{2}\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right)-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\sin\frac{\lambda\pi}{2}$$

$$55)\quad 2\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\cos x\vartheta=2\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\cos x\vartheta+\sum_{x=1}^{x=\lambda}\frac{\sin\vartheta\left\{\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]+\frac{1}{2}\right\}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}-\frac{\lambda\sin\frac{(2\lambda+1)\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}$$

$$56)\quad 2\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\sin x\vartheta=2\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\sin x\vartheta-\frac{1}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\sum_{x=1}^{x=\lambda}\cos\vartheta\left\{\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]+\frac{1}{2}\right\}+\frac{\lambda\cos\frac{(2\lambda+1)\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}$$

$$57)\quad 2\sum_{x=1}^{x=n}(-1)^x\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]=2\sum_{x=1}^{x=\lambda}(-1)^x\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]+\sum_{x=1}^{x=\lambda}(-1)^{\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]}+(-1)^{\lambda+1}\lambda$$

$$58)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left\{(-1)^{\frac{x}{2}}+(-1)^{\frac{3x}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]=\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left\{(-1)^{\frac{x}{2}}+(-1)^{\frac{3x}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]+\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=\lambda}\sin\left\{\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right\}-$$
$$-\lambda\sqrt{2}\sin\frac{(2\lambda+1)\pi}{4}$$

$$59)\quad \sum_{x=1}^{x=n}\left\{(-1)^{\frac{x-1}{2}}-(-1)^{\frac{3x-1}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]=\sum_{x=1}^{x=\lambda}\left\{(-1)^{\frac{x-1}{2}}-(-1)^{\frac{3x-1}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]-\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=\lambda}\cos\left\{\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right\}+$$
$$+\lambda\sqrt{2}\cos\frac{(2\lambda+1)\pi}{4}.$$

Setzt man in den Gleichungen 52) und 53):

$$\alpha=n,\ \beta=2,\ \gamma=1,\ m=2,$$

so erhält man die von Herrn Stieltjes a. a. O. mitgetheilten speciellen Relationen:

$$60)\quad \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]}\left[\frac{n}{2x-1}\right](2x-1)=\sum_{x=1}^{x=n}k_1(x)=\sum_{x=1}^{x=\lambda_1}\left[\frac{n}{2x-1}\right](2x-1)+\sum_{x=1}^{x=\lambda_1}\left[\frac{n+x}{2x}\right]^2-\lambda_1^3\qquad\left(\lambda_1=\left[\frac{\sqrt{8n+1}+1}{4}\right]\right)$$

$$61)\quad \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]}\left[\frac{n}{2x-1}\right]\sin\frac{(2x-1)\pi}{4}=\sum_{x=1}^{x=\lambda_1}\left[\frac{n}{2x-1}\right]\sin\frac{(2x-1)\pi}{4}+\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=\lambda_1}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\left[\frac{n+x}{2x}\right]\right)-\lambda_1\sqrt{2}\sin\frac{2\lambda_1\pi}{4}.$$

Von den in diesen Formeln enthaltenen arithmetischen Theoremen mögen die folgenden besonders erwähnt werden:

Die Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche von der Form $\beta x-\gamma$ und grösser als $\beta\lambda-\gamma$ sind, ist um λ^2 kleiner, als die Summe der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{\beta n-(n-1)\gamma}{\beta},\ \frac{\beta n-(n-2)\gamma}{2\beta},\ \frac{\beta n-(n-3)\gamma}{3\beta},\ \ldots,\ \frac{\beta n-(n-\lambda)\gamma}{\lambda\beta}$$

enthalten sind.

Die Anzahl der ungeraden Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als $2\lambda_1-1$ sind, ist um λ_1^2 kleiner, als die Summe def grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2},\ \frac{n+2}{4},\ \frac{n+3}{6},\ \ldots,\ \frac{n+\lambda_1}{2\lambda_1}$$

enthalten sind.

Die Summe der Quadrate der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2},\ \frac{n+2}{4},\ \frac{n+3}{6},\ \ldots,\ \frac{n+\lambda_1}{2\lambda_1}$$

enthalten sind, übertrifft die Summe derjenigen ungeraden Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als $2\lambda_1-1$ sind, um λ_1^3.

Die Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche von der Form $4r+1$ und grösser als $2\lambda_1-1$ sind, übertrifft die Anzahl der übrigen ungeraden, oberhalb der angegebenen Grenze liegenden Divisoren um ebenso viel, als die Anzahl der ungeraden grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2},\ \frac{n+2}{4},\ \frac{n+3}{6},\ \ldots,\ \frac{n+\lambda_1}{2\lambda_1}$$

enthalten sind, grösser ist, als der Ausdruck $\lambda_1\frac{1-(-1)^{\lambda_1}}{2}$.

Die Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche von der Form $8r \pm 1$ und grösser als $2\lambda_1 - 1$ sind, übertrifft die Anzahl der übrigen ungeraden, oberhalb der angegebenen Grenze liegenden Divisoren um ebensoviel, als die Anzahl derjenigen grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{4}, \frac{n+3}{6}, \ldots, \frac{n+\lambda_1}{2\lambda_1}$$

enthalten sind, und die Form $4r+1$ besitzen, die Summe aus der Anzahl der übrigen ungeraden grössten ganzen Zahlen und dem Ausdrucke $i^{\lambda_1-1}\lambda_1 \frac{1-(-1)^{\lambda_1}}{2}$ übertrifft.

Ist:

62) $$[\alpha] = (\beta n_1 - \gamma) n_2$$

und setzt man in der Gleichung 7):

$$p = n_1,$$

so wird:

$$A = \left[\frac{\alpha}{\beta n_1 + \beta - \gamma}\right] = n_2 - \vartheta_1,$$

wo ϑ_1, wie man sofort sieht, der Relation:

$$(\vartheta_1 - 1)(\beta n_1 + \beta - \gamma) < \beta n_2 \leqq \vartheta_1 (\beta n_1 + \beta - \gamma)$$

genügt. Aus der Beziehung:

$$n_2 - \vartheta_1 \leqq \frac{\alpha}{\beta n_1 + \beta - \gamma} < n_2 - \vartheta_1 + 1$$

folgt:

$$n_1 + \frac{\beta(n_2 - \vartheta_1) - \sigma(n_1\beta - \gamma)}{\beta(n_2 - \vartheta_1 + \sigma)} \leqq \frac{\alpha + \gamma(n_2 - \vartheta_1 + \sigma)}{\beta(n_2 - \vartheta_1 + \sigma)} < n_1 + 1 + \frac{(1-\sigma)(\beta n_1 + \beta - \gamma)}{\beta(n_2 - \vartheta_1 + \sigma)} \qquad (\sigma = 1, 2, 3, \ldots, \vartheta_1)$$

und daher ist:

$$\left[\frac{\alpha + \gamma(n_2 - \vartheta_1 + \sigma)}{\beta(n_2 - \vartheta_1 + \sigma)}\right] = n_1 - \rho \qquad (\rho \geqq 0).$$

Wäre $\rho > 0$, so hätte man die Relation:

$$\alpha - [\alpha] < (1-\rho)\beta n_2 - (\vartheta_1 - \sigma)(\beta n_1 + \beta - \gamma - \rho\beta)$$

was unmöglich ist, da die rechte Seite negativ, die linke aber positiv oder Null ist.

Man hat also die Gleichung:

$$\left[\frac{\alpha + \gamma(n_2 - \vartheta_1 + \sigma)}{\beta(n_2 - \vartheta_1 + \sigma)}\right] = n_1 \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, \vartheta_1).$$

Es besteht daher die Relation:

63) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x - \gamma}\right] f(x) = \sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{\alpha}{\beta x - \gamma}\right] f(x) + \sum_{x=1}^{x=n_2} F\left(\left[\frac{\alpha + \gamma x}{\beta x}\right]\right) - n_2 F(n_1). \qquad \{[\alpha] = (\beta n_1 - \gamma) n_2\}.$$

Gibt man in dieser Gleichung der Function $f(x)$ wieder der Reihe nach die speciellen Werthe 22), so erhält man die Formeln:

64) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x - \gamma}\right] = \sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{\alpha}{\beta x - \gamma}\right] + \sum_{x=1}^{x=n_2}\left[\frac{\alpha}{\beta x - \gamma}\right] - n_1 n_2$$

65) $$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x - \gamma}\right] x = \sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{\alpha}{\beta x - \gamma}\right] x + \sum_{x=1}^{x=n_2} D\left(\left[\frac{\alpha + \gamma x}{\beta x}\right]\right) - n_2 D(n_1)$$

66) $\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]x^3=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]x^3+\sum_{x=1}^{x=n_2}D^2\left(\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right)-n_2D^2(n_1)$

67) $\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]x^m-\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right](x-1)^m=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]x^m-\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right](x-1)^m+\sum_{x=1}^{x=n_2}\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]^m-n_2n_1^m$

68) $\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\sin\frac{(2x-1)\pi}{4}=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\sin\frac{(2x-1)\pi}{4}+\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=n_2}\sin^2\left\{\frac{\pi}{4}\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right\}-n_2\sqrt{2}\sin^2\frac{n_1\pi}{4}$

69) $\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\cos\frac{(2x-1)\pi}{4}=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\cos\frac{(2x-1)\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{x=1}^{x=n_2}\sin\left\{\frac{\pi}{2}\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\right\}-\frac{n_2}{\sqrt{2}}\sin\frac{n_1\pi}{2}$

70) $2\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\cos x\vartheta=2\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\cos x\vartheta+\frac{1}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\sum_{x=1}^{x=n_2}\sin\vartheta\left\{\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]+\frac{1}{2}\right\}-\frac{n_2\sin\frac{(2n_1+1)\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}$

71) $2\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\sin x\vartheta=2\sum_{x=1}^{x=n_1}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]\sin x\vartheta-\frac{1}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\sum_{x=1}^{x=n_2}\cos\vartheta\left\{\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]+\frac{1}{2}\right\}+\frac{n_2\cos\frac{(2n_1+1)\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}$

72) $2\sum_{x=1}^{x=n}(-1)^x\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]=2\sum_{x=1}^{x=n_1}(-1)^x\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]+\sum_{x=1}^{x=n_2}(-1)^{\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]}+(-1)^{n_1+1}n_2$

73) $\sum_{x=1}^{x=n}\left\{(-1)^{\frac{x}{2}}+(-1)^{\frac{3x}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left\{(-1)^{\frac{x}{2}}+(-1)^{\frac{3x}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]+\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=n_2}\sin\left\{\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right\}-$

$$-n_2\sqrt{2}\sin\frac{(2n_1+1)\pi}{4}$$

74) $\sum_{x=1}^{x=n}\left\{(-1)^{\frac{x-1}{2}}-(-1)^{\frac{3x-1}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]=\sum_{x=1}^{x=n_1}\left\{(-1)^{\frac{x-1}{2}}-(-1)^{\frac{3x-1}{2}}\right\}\left[\frac{\alpha}{\beta x-\gamma}\right]-\sqrt{2}\sum_{x=1}^{x=n_2}\cos\left\{\left[\frac{\alpha+\gamma x}{\beta x}\right]\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right\}+$

$$+n_2\sqrt{2}\cos\frac{(2n_1+1)\pi}{4}.$$

Von den speciellen Fällen dieser Formeln mögen die folgenden von Herrn Cesaro mitgetheilten Gleichungen erwähnt werden:

75) $\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]=\sum_{x=1}^{x=n'_1}\left[\frac{n}{x}\right]+\sum_{x=1}^{x=n'_2}\left[\frac{n}{x}\right]-n \qquad (n=n'_1n'_2)$

76) $\sum_{x=2}^{x=m^2}\left[\frac{m^2}{x}\right]=\sum_{x=m+1}^{x=m^2}\left[\frac{m^2}{x}\right].$

Die obigen Formeln enthalten eine Reihe von arithmetischen Theoremen, von denen die folgenden besonders hervorgehoben werden mögen:

Die Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche von der Form $\beta x-\gamma$ und grösser als $\beta n_1-\gamma$ sind, übertrifft um n_1n_2 die Summe der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{\beta n-(n-1)\gamma}{\beta},\ \frac{\beta n-(n-2)\gamma}{2\beta},\ \frac{\beta n-(n-3)\gamma}{3\beta},\ldots,\ \frac{\beta n-(n-n_2)\gamma}{n_2\beta}$$

enthalten sind, wenn $n=(\beta n_1-\gamma)n_2$ ist.

Ist $n = n_1 n_2$, so ist die Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als n_2 sind, um n kleiner, als die Anzahl derjenigen Divisoren, welche nicht grösser als n_1 sind.

Ist $n = n_1 n_2$, so übertrifft die Summe der $m$ten Potenzen derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als n_1 sind, die Summe der $m$ten Potenzen der eben genannten, um die Einheit verminderten Divisoren um eben so viel, als die Summe der $m$ten Potenzen der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \ldots, \frac{n}{n_2}$$

enthalten sind, das Product $n n_1^{m-1}$ übertrifft.

Ist $n = n_1 n_2$, so übertrifft die doppelte Summe derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als n_1 sind, ihre Anzahl um eben so viel, als die Summe der Quadrate der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \ldots, \frac{n}{n_2}$$

enthalten sind, grösser als das Product $n n_1$ ist.

Ist $n = n_1 n_2$, so ist die Summe derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als n_1 sind, um $\frac{n(n_1+1)}{2}$ kleiner, als die Summe derjenigen Trigonalzahlen, deren Ordnungszahlen durch die grössten ganzen Zahlen angegeben werden, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \ldots, \frac{n}{n_2}$$

enthalten sind, während die Summe der dritten Potenzen der angegebenen Divisoren von der Summe der Quadrate der erwähnten Trigonalzahlen um $n\,\frac{n_1(n_1+1)^2}{4}$ übertroffen wird.

Ist $n = (2n_1-1)\,n_2$, so ist die Anzahl derjenigen ungeraden Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als $2n_1-1$ sind, um $n_1 n_2$ kleiner, als die Summe der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{4}, \frac{n+3}{6}, \ldots, \frac{n+n_2}{2n_2}$$

enthalten sind.

Ist $n = (2n_1-1)n_2$, so ist die Summe derjenigen ungeraden Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche grösser als $2n_1-1$ sind, um $n^2_1 n_2$ kleiner, als die Summe der Quadrate der grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{4}, \frac{n+3}{6}, \ldots, \frac{n+n_2}{2n_2}$$

enthalten sind.

Ist $n = (2n_1-1)\,n_2$, so übertrifft die Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche von der Form $4r+1$ und grösser als $2n_1-1$ sind, die Anzahl der übrigen oberhalb der angegebenen Grenze liegenden ungeraden Divisoren um eben so viel, als die Anzahl der ungeraden grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{4}, \frac{n+3}{6}, \ldots, \frac{n+n_2}{2n_2}$$

enthalten sind, das Product $n_2\,\frac{1-(-1)^{n_1}}{2}$ übertrifft.

Ist $n = (2n_1-1)\,n_2$, so übertrifft die Anzahl derjenigen Divisoren aller ganzen Zahlen von 1 bis n, welche von der Form $8r\pm1$ und grösser als $(2n_1-1)$ sind, die Anzahl der übrigen oberhalb der angegebenen Grenze liegenden ungeraden Divisoren um eben so viel, als die Anzahl derjenigen grössten ganzen Zahlen, welche in den Gliedern der Reihe:

$$\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{4}, \frac{n+3}{6}, \ldots, \frac{n+n_2}{2n_2}$$

enthalten, und von der Form $4r+1$ sind, die Summe aus der Anzahl der übrigen ungeraden grössten ganzen Zahlen und dem Producte $n_2 i^{n_1-1} \frac{1-(-1)^{n_1}}{2}$ übertrifft.

Auf die in dieser Mittheilung angegebenen Formeln gedenke ich übrigens demnächst in einer Arbeit über asymptotische Gesetze der Zahlentheorie zurückzukommen.

Es mag bei dieser Gelegenheit noch gezeigt werden, wie leicht sich mit Hilfe der zahlentheoretischen Function $\varepsilon(x)$ jener allgemeine Satz ableiten lässt, welchen Herr Stern in seiner interessanten Arbeit: „Über einige Eigenschaften der Function $E(x)$" mitgetheilt hat. (Journal für die reine und angewandte Mathematik von Borchardt, 59. Band.)

Der erwähnte Satz, in welchem bekannte Theoreme von Eisenstein und Sylvester als specielle Fälle enthalten sind, lautet:

Es ist:

77) $$\sum_{x=1}^{x=\frac{k(q-f)}{n}} \left[\frac{xpn}{qm}\right] + \sum_{y=1}^{y=\frac{k(p-e)}{m}} \left[\frac{yqm}{pn}\right] = \frac{k^2(p-e)(q-f)}{mn}$$

wenn:

$$ke < m$$

$$kf < n$$

und $\frac{p-e}{m}$, $\frac{q-f}{n}$ positive ganze Zahlen sind.

Die auf der linken Seite der Gleichung 77) stehende Summe hat den Werth:

$$\sum_{x=1,y=1}^{x=\frac{k(q-f)}{n},\, y=\left[\frac{kp(q-f)}{qm}\right]} \varepsilon\left(\frac{xpn}{yqm}\right) + \sum_{y=1,x=1}^{y=\frac{k(p-e)}{m},\, x=\left[\frac{kq(p-e)}{pn}\right]} \varepsilon\left(\frac{yqm}{xpn}\right).$$

Nun ist:

$$\frac{kp(q-f)}{qm} = \frac{k(p-e)}{m} + \frac{k(qe-pf)}{qm}$$

$$\frac{kq(p-e)}{pn} = \frac{k(q-f)}{n} - \frac{k(eq-pf)}{pn}$$

und daher, wie auch die Differenz $qe-pf$ beschaffen sein mag:

$$\left[\frac{kp(q-f)}{qm}\right] \leqq \frac{k(p-e)}{m}$$

$$\left[\frac{kq(p-e)}{pn}\right] \leqq \frac{k(q-f)}{n}$$

Da nun jedesmal, wenn $x<1$ ist, $\varepsilon(x)=0$ wird, so kann man den Ausdruck 78) auch in folgender Form schreiben:

$$\sum_{x=1,\, y=1}^{x=\frac{k(q-f)}{n},\, y=\frac{k(p-e)}{m}} \left\{\varepsilon\left(\frac{xpn}{yqn}\right) + \varepsilon\left(\frac{yqm}{xpn}\right)\right\}$$

und diese Summe ist, weil für jedes Werthepaar x, y einer der beiden Brüche $\frac{xpm}{yqm}$, $\frac{yqm}{xpn}$ grösser, der andere aber kleiner als 1 ist, gleich der Anzahl der Werthepaare, d. i. gleich $\frac{k^2(p-e)(q-f)}{mn}$.